第 12 章　复数

12.1　复数的概念

1. C　【解析】由题意得 $zi=4$，已知 $i^2=-1$，则 $zi^2=4i$，所以 $z=-4i$.

2. C　【解析】由题意得 $\begin{cases}a=b+2,\\1=-a,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-3,\\a=-1,\end{cases}$ 所以 $a+b=-4$. 故选 C.

3. B　【解析】由条件知，$\sin\theta=\cos 2\theta$，所以 $2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$，所以 $\sin\theta=-1$ 或 $\sin\theta=\frac{1}{2}$，因为 $0<\theta<2\pi$，所以 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 或 $\theta=\frac{5\pi}{6}$ 或 $\theta=\frac{3\pi}{2}$. 故选 B.

4. C　【解析】由题意可得 $\begin{cases}a^2-1=0,\\a+1\neq 0,\end{cases}$（提示：纯虚数实部为 0，虚部不为 0）解得 $a=1$，所以"$a=1$"是"z 为纯虚数"的充要条件. 故选 C.

5. C　【解析】若题中复数是纯虚数，则 $\begin{cases}a^2-a-2=0,\\|a-1|-1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $a=-1$，所以当 $a\neq-1$ 时，题中复数不是纯虚数.

6. ABC　【解析】对于 A，复数 $z_1=m^2-1+(m+1)i$ 是纯虚数，则 $\begin{cases}m^2-1=0,\\m+1\neq 0,\end{cases}$ 所以 $m=1$，A 正确；

对于 B，若 $z_2=\cos 2\theta+i\sin\theta$ 为实数，则 $\sin\theta=0$，则 $\theta=k\pi, k\in\mathbf{Z}$，B 正确；

对于 C，若 $z_1=z_2$，则 $\begin{cases}m^2-1=\cos 2\theta,\\m+1=\sin\theta,\end{cases}$ 则 $m^2-1=1-2(m+1)^2$，解得 $m=0$ 或 $m=-\frac{4}{3}$，C 正确；

对于 D，若 $z_1\geqslant 0$，则 $m^2-1\geqslant 0$，且 $m+1=0$，则 $m=-1$，D 错误. 故选 ABC.

7. $\left[-\frac{9}{16},7\right]$　【解析】由题意知，$m=$

$2\cos\theta, 4-m^2=\lambda+3\sin\theta$，所以 $(2\cos\theta)^2+\lambda+3\sin\theta=4$，

整理可得 $\lambda=4\sin^2\theta-3\sin\theta=4\left(\sin\theta-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{9}{16}$，

又 $\sin\theta\in[-1,1]$，所以 $\lambda=4\left(\sin\theta-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{9}{16}$ 的取值范围是 $\left[-\frac{9}{16},7\right]$.

8.【解】(1) 因为 $z=\frac{a^2-7a+6}{a+1}+(a^2-5a-6)\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$ 为实数，

所以 $\begin{cases}a^2-5a-6=0,\\a+1\neq0,\end{cases}$ 解得 $a=6$，

所以当 $a=6$ 时，z 为实数.

(2) 因为 $z=\frac{a^2-7a+6}{a+1}+(a^2-5a-6)\mathrm{i}$ $(a\in\mathbf{R})$ 为虚数，

所以 $\begin{cases}a^2-5a-6\neq0,\\a+1\neq0,\end{cases}$ 解得 $a\neq-1$ 且 $a\neq6$.

所以当 $a\in(-\infty,-1)\cup(-1,6)\cup(6,+\infty)$ 时，z 为虚数.

(3) 因为 $z=\frac{a^2-7a+6}{a+1}+(a^2-5a-6)\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$ 为纯虚数，

所以 $\begin{cases}a^2-5a-6\neq0,\\a+1\neq0,\\a^2-7a+6=0,\end{cases}$ 解得 $a=1$.

所以当 $a=1$ 时，z 为纯虚数.

12.2　复数的运算

1. D　【解析】$z=(3-4\mathrm{i})-(1-2\mathrm{i})=2-2\mathrm{i}$，故复数 z 的虚部为 -2. 故选 D.

2. C　【解析】$(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i}^3)=(1-\mathrm{i})\cdot(1+\mathrm{i})=2$. 故选 C.

3. A　【解析】$z=\mathrm{i}(3-2\mathrm{i})=3\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2=2+3\mathrm{i}$，$\therefore\ \bar{z}=2-3\mathrm{i}$. 故选 A.

4. A　【解析】因为 $(1-\mathrm{i})z=2+\mathrm{i}$，所以 $z=\frac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(2+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$. 故选 A.

5. A　【解析】由 $\frac{i^2-3}{z}=(1+i)^3$，可得 $z(1+i)^3=-4$，

故 $z=-\frac{4}{(1+i)^3}=-\frac{4}{(1+i)(1+2i+i^2)}=-\frac{4}{-2+2i}=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$. 故选 A.

6. C　【解析】若 $\frac{1}{1-i}=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=a+bi$，根据复数相等的充要条件得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\ b=\frac{1}{2},\end{cases}$ 所以 $a^b=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

7. AC　【解析】$\bar{\omega}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$\omega^2=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\bar{\omega}$，故 A 正确；

$\omega^3=\omega^2\omega=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)=1$，故 B 错误；

$\omega^2+\omega+1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+1=0$，故 C 正确；

虚数不能比较大小，故 D 错误.

8. C　【解析】∵ 复数 $3-2i$ 是关于 x 的方程 $2x^2-mx+n=0$ 的一个根，

∴ 复数 $3+2i$ 也是关于 x 的方程 $2x^2-mx+n=0$ 的一个根，

∴ $\frac{m}{2}=3-2i+3+2i=6$，

$\frac{n}{2}=(3-2i)(3+2i)=13$，

∴ $m=12$，$n=26$.

故选 C.

9.【解】设方程的实数根为 $x=m$，则 $(2+i)\cdot m^2-am+1=4i$，整理得 $(2m^2-am+1)+m^2i=4i$. 根据复数相等的充要条

件,得$\begin{cases}m^2=4,\\2m^2-am+1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=2,\\a=\dfrac{9}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}m=-2,\\a=-\dfrac{9}{2}.\end{cases}$

$\therefore$当实数$a=\dfrac{9}{2}$时,实数根为2;当实数$a=-\dfrac{9}{2}$时,实数根为-2.

10.【解】(1)$z_1\cdot z_2=(1-3i)(a+i)=a+3+(1-3a)i$,

$\because z_1\cdot z_2$是“理想复数”,

$\therefore (a+3)+(1-3a)=0$,$\therefore a=2$.

(2)$|z_1|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$,$|z_2|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,

$\because |z_1|>|z_2|$,

$\therefore z_1\otimes z_2=\dfrac{z_1+z_2}{z_2}=\dfrac{z_1}{z_2}+1=\dfrac{1-3i}{2+i}+1=\dfrac{(1-3i)(2-i)}{5}+1=\dfrac{4}{5}-\dfrac{7}{5}i$.

11. 1　【解析】因为$i^2=-1$,$i^3=-i$,$i^4=1$,$i^5=i$,…,以4为一个周期循环,

所以$i+i^2+i^3+i^4=0$,所以$i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{2\,016}=0$,所以原式等于1.

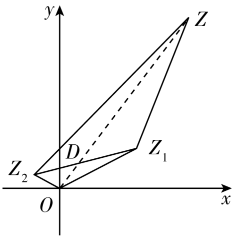
12.3　复数的几何意义

1. B　【解析】$z_1=3-2i$对应的点的坐标为$(3,-2)$,因为z_1,z_2在复平面内对应的点关于虚轴对称,所以z_2对应的点的坐标为$(-3,-2)$,故$z_2=-3-2i$.故选B.

2. C　【解析】因为$b-3i=4+ai$且a,b均为实数,所以$a=-3$,$b=4$,所以$|a+bi|=\sqrt{9+16}=5$.故选C.

3. B　【解析】因为复数$z_1=a+2i$,$z_2=-2+i$,且$|z_1|<|z_2|$,所以$\sqrt{a^2+4}<\sqrt{5}$,解得$-1<a<1$.

4. B　【解析】画出草图,如图所示,连接OZ,设OZ与Z_1Z_2相交于点D.



因为 $z=3z_1+4z_2$，所以 $\overrightarrow{OZ}=3\overrightarrow{OZ_1}+4\overrightarrow{OZ_2}$.

设 $\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{OZ}$，则 $\overrightarrow{OD}=3\lambda\overrightarrow{OZ_1}+4\lambda\overrightarrow{OZ_2}$，

又 Z_1,Z_2,D 三点共线，

所以 $3\lambda+4\lambda=1$，解得 $\lambda=\frac{1}{7}$，则 $OD=\frac{1}{6}ZD$.

所以 $S_{\triangle Z_1Z_2O}=\frac{1}{6}S_{\triangle Z_1Z_2Z}$，故 $\triangle Z_1Z_2O$ 的面积为$\frac{1}{6}S$. 故选 B.

5. $-1+5i$　$1+6i$　【解析】由向量平移可知 $\overrightarrow{O_1A_1}=\overrightarrow{OA}=(-1,5)$，∴ 向量 $\overrightarrow{O_1A_1}$ 对应的复数为 $-1+5i$. 由题意可得 $A_1(1,6)$，故点 A_1 对应的复数为 $1+6i$.

6. B　【解析】因为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$，所以向量 $\overrightarrow{AB}$ 对应的复数为 $(-3+2i)-(2-3i)=-5+5i$，故选 B.

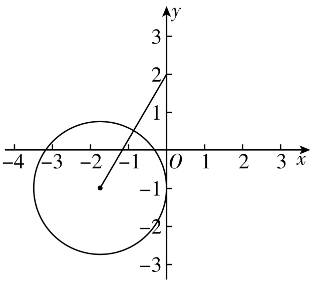
7. AD　【解析】对 A，$|z_1|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，故 A 正确；

对 B，$z_1=\sqrt{3}+i$ 对应复平面内点 $Z_1(\sqrt{3},1)$，$z_2=x+yi$ 对应复平面内点 $Z_2(x,y)$，因为 $\overrightarrow{OZ_1}//\overrightarrow{OZ_2}$，所以 $\sqrt{3}y-x=0$，故 B 错误；

对 C，若 $\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$，则 $\sqrt{3}x+y=0$，即 $y=-\sqrt{3}x$，故 $z_1z_2=(\sqrt{3}+i)(x-\sqrt{3}xi)=2\sqrt{3}x-2xi\neq0$，故 C 错误；

对 D，若 $|z_2+z_1|\leqslant\sqrt{3}$，即 $|(x+\sqrt{3})+(y+1)i|\leqslant\sqrt{3}$，得 z_2 在复平面内对应的点 (x,y) 在以 $(-\sqrt{3},-1)$ 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆上及圆内，又 $|z_2-2i|$ 的几何意义为 (x,y) 到 $(0,2)$ 的距离，故 $|z_2-2i|$ 的最大值为

$\sqrt{(-\sqrt{3}-0)^2+(-1-2)^2}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$，故 D 正确. 故选 AD.



8. $5-2i$ 【解析】依题意得 $A(0,0)$，$B(3,2)$，$D(2,-4)$，$\overrightarrow{AB}=(3,2)$，$\overrightarrow{AD}=(2,-4)$. 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(3,2)+(2,-4)=(5,-2)$，故 C 点对应的复数为 $5-2i$.

9. $\sqrt{2}-1$ 【解析】设 $z_1=x+yi$，$x,y\in\mathbf{R}$，则 $\bar{z}_1=x-yi$，由 $|z_1-1|=|\bar{z}_1+i|$ 得 $(x-1)^2+y^2=x^2+(1-y)^2$，

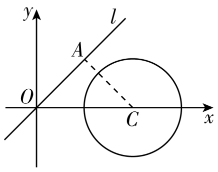
整理得 $x-y=0$，即在复平面内 z_1 对应的点的集合表示的图形为直线 l：$x-y=0$.

由 $|z_2-2|=1$ 得在复平面内 z_2 对应的点的集合表示的图形是以点 $C(2,0)$ 为圆心，1 为半径的圆.

如图，过点 C 作 $CA\perp l$ 于点 A，则 $\triangle OAC$ 为等腰直角三角形，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2}$，

而 $|z_1-z_2|$ 表示在复平面内复数 z_1，z_2 对应点的距离，

所以 $|z_1-z_2|$ 的最小值为 $|\overrightarrow{AC}|-1=\sqrt{2}-1$.



10. D 【解析】设复数 $2z_1$，$3z_2$ 在复平面内对应的点分别为 Z_1'，Z_2'，则四边形 $OZ_1'ZZ_2'$ 为平行四边形，

如图，分割该平行四边形，设平行四边形的面积为 $A(A>0)$，

则 $S_{\triangle Z_1Z_2O}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}A=\frac{1}{12}A=S$，所以

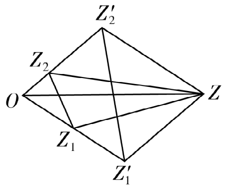
$A=12S$，

则 $S_{\triangle OZ_2Z}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}A=\frac{1}{6}A$，$S_{\triangle OZ_1Z}=$

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}A=\frac{1}{4}A$，

故 $S_{\triangle Z_1Z_2Z}=\frac{5}{12}A-\frac{1}{12}A=\frac{1}{3}A=4S$. 故

选 D.



12.4 复数的三角形式*

1. D 【解析】$4(\cos 60°+i\sin 60°)\times 3(\cos 150°+i\sin 150°)$

$=12[\cos(60°+150°)+i\sin(60°+150°)]$

$=12(\cos 210°+i\sin 210°)$

$=12\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-6\sqrt{3}-6i$，故选 D.

2. AC 【解析】对于 A 选项，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则 $z^2=r^2\cdot(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$，可得 $|z^2|=|r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)|=r^2$，$|z|^2=|r(\cos\theta+i\sin\theta)|^2=r^2$，A 选项正确；

对于 B 选项，当 $r=1$，$\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，$z^3=(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta=\cos\pi+i\sin\pi=-1$，B 选项错误；

对于 C 选项，当 $r=1$，$\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，$z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，则 $\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$，C 选项正确；

对于 D 选项，$z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta=\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}$，

取 $n=4$，则 n 为偶数，$z^4=\cos\pi+i\sin\pi=-1$，不是纯虚数，D 选项错误.

3. π 【解析】因为 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,所以 $e^{3i\pi}=\cos 3\pi+i\sin 3\pi=\cos\pi+i\sin\pi$,所以 $e^{3i\pi}$ 的辐角主值为 π.

4. $\frac{\pi}{6}$ 【解析】由题知,$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$,$z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$,所以$\frac{z_1}{z_2}$的辐角主值为$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

5. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 【解析】因为复数 $z=\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}$是方程 $x^5-\alpha=0$ 的一个根,所以 $\alpha=z^5=\left(\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right)^5=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

6. 16　$\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$(答案不唯一)

【解析】$\because\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$,

$\therefore z=(\sqrt{3}+i)^4=2^4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$,

则 $|\bar{z}|=|z|=2^4=16$.

由题意知 $\omega^6=1$,设 $\omega=\cos\theta+i\sin\theta$,则 $\omega^6=\cos 6\theta+i\sin 6\theta=1$,所以 $\begin{cases}\sin 6\theta=0,\\ \cos 6\theta=1.\end{cases}$ 又 $\omega\notin\mathbf{R}$,所以 $\sin\theta\neq 0$,故可取 $\theta=\frac{\pi}{3}$,则 $\omega=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$(答案不唯一).

7.【解】(1) $z_1=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=2\times 0+2\times(-1)i=-2i$.

(2) $z_2=5(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)=5\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+5\times\frac{\sqrt{2}}{2}i=-\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}i$.

8.【解】(1) $r=1$,对应的点在 x 轴的正半轴上,所以 $\arg 1=0$. 所以 $1=\cos 0+i\sin 0$.

(2) $r=2$,对应的点在 y 轴的负半轴上,所以 $\arg(-2i)=\frac{3\pi}{2}$. 所以 $-2i=$

$2\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

(3) $-2\left(\sin\frac{3\pi}{4}+i\cos\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$,

$r=2$,对应的点在第二象限,

且 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以取 $\theta=\frac{3\pi}{4}$.

所以 $-2\left(\sin\frac{3\pi}{4}+i\cos\frac{3\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

9. B 【解析】由题可知 $z_1=1=\cos 0+i\sin 0$, $z_2=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$,所以 $z_2z_1=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$,所以 $\arg(z_2z_1)=\frac{\pi}{6}$.

10. A 【解析】因为 $|z_1|=\sqrt{4\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\sqrt{1+3\sin^2\theta}$,所以 $z_1=\sqrt{1+3\sin^2\theta}\cdot\left(\frac{2\sin\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}+\frac{i\cos\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}\right)$,设 $\cos\beta=\frac{2\sin\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}$, $\sin\beta=\frac{\cos\theta}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}$, $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\tan\beta=\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}$,

$z_2=\sqrt{1+3\sin^2\theta}\left[\cos\left(\beta-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\beta-\frac{3\pi}{4}\right)\right]=\sqrt{1+3\sin^2\theta}\cdot\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\beta\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\beta\right)\right]$,

即 $r=\sqrt{1+3\sin^2\theta}$, $\cos\varphi=\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\beta\right)$, $\sin\varphi=\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\beta\right)$,

故 $\tan\varphi=\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{4}+\beta\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{4}+\beta\right)}=\tan\left(\frac{5\pi}{4}+\beta\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)=\frac{1+\tan\beta}{1-\tan\beta}=\frac{1+\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}}{1-\frac{\cos\theta}{2\sin\theta}}=\frac{2\tan\theta+1}{2\tan\theta-1}$.

故选 A.